Activité 1. Lois de De Morgan

On appelle expression booléenne toute expression comportant des variables booléennes et les opérateurs logiques ET, OU et NON. On donne ci-dessous quatre exemples d'expressions booléennes. Déterminer la table de vérité associée à chacune d'entre elles.

non$(A$ et $B)$

A	B	A et B	non$(A$ et $B)$

non A ou non B

A	B	non A	non B	non A ou non B

On en déduit

non$(A$ ou $B)$

A	B	A ou B	non$(A$ ou $B)$

non A et non B

A	B	non A	non B	non A et non B

On en déduit

Activité 2. Distributivité de ET sur OU

Déterminer la table de vérité associée à chaque expression booléenne ci-dessous.

A et $(B$ ou $C)$

A	B	C	B ou C	A et $(B$ ou $C)$

A et B ou A et C

A	B	C	A et B	A et C	A et B ou A et C

On en déduit

Activité 3. Distributivité du $+$ sur $\cdot$

Dans cette activité, on souhaite prouver la distributivité du $+$ sur $\cdot$ c'est-à-dire l'égalité :

$$A + B \cdot C = A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

On suppose que l'on a déjà démontré la distributivité du $\cdot$ sur le $+$ c'est-à-dire l'égalité suivante :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

1. Sans utiliser de table de vérité, montrer que pour tout couple de variables booléennes A et B on a :

   $$A + A \cdot B = A$$

   Aide. Partir du membre $A + A \cdot B$ et utiliser la formule $A + 1 = A$.

2. Prouver maintenant la distributivité du $+$ sur $\cdot$ c'est-à-dire l'égalité suivante :

   $$A + B \cdot C = A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

   Aide. Partir du membre $(A + B) \cdot (A + C)$ et développer avec la double distributivité.
   Utiliser ensuite l'égalité prouvée à la question 1.