Exercice 1 :

① $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$

Analyse rapide

$$\underbrace{\underbrace{n^2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}_{+\infty}$$

Pas de FI

Rédaction

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty & \text{(d'après le cours)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0^+ & \text{(d'après le cours)} \end{cases}$$

donc par somme sur les limites

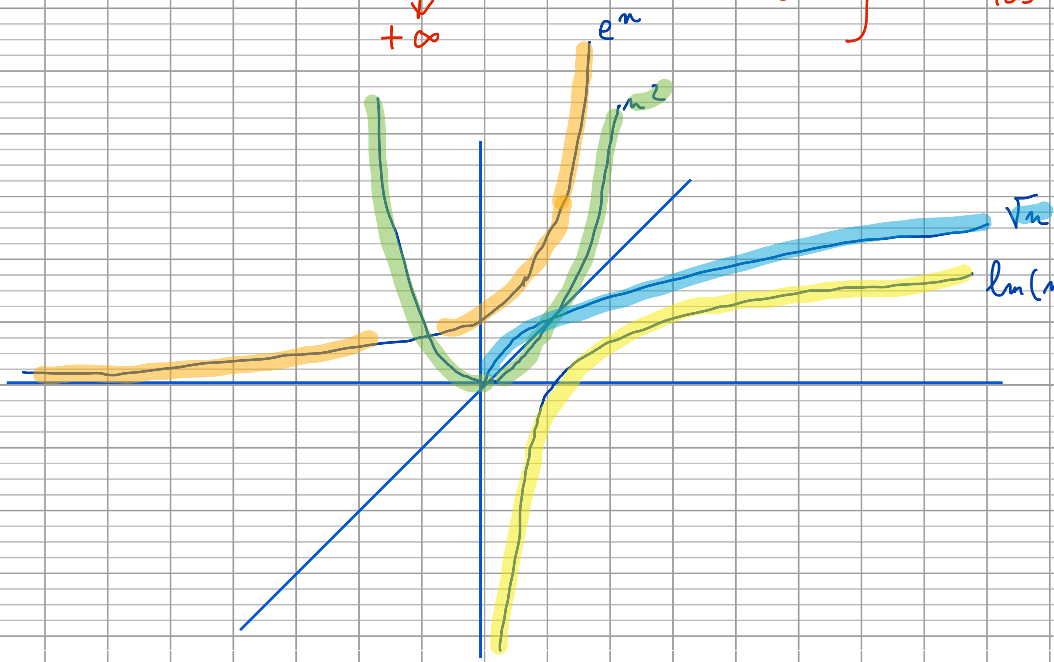
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

② $u_n = \sqrt{n} + e^{-n}$

Analyse rapide

$$\left.\underset{\downarrow\,+\infty}{\sqrt{n}} + e^{\overset{\to -\infty}{-n}} \to 0\right\} \to +\infty$$

Pas de FI



Rédaction

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ (d'après le cours)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} \quad \text{or} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty \text{ (cours)} \\ \qquad = 0^+ \end{cases}$$

donc par somme sur les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

③ $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

Analyse rapide

$$\underbrace{1 - \underbrace{\frac{1}{\underbrace{n^2}_{\to +\infty}}}_{\to 0^+}}_{\to 1}$$

④ $u_n = e^n \ln(n)$

$$\underbrace{\underbrace{e^n}_{\to +\infty}\underbrace{\ln(n)}_{\to +\infty}}_{\to +\infty}$$

⑤

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{n^3}_{\to +\infty}\underbrace{\sqrt{n}}_{\to +\infty}}_{\to +\infty} - \underbrace{1000}_{\text{const}}}_{+\infty}$$

⑥

$$e^{-n} + 3 = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^n}_{\to +\infty}}}_{\to 0^+} + 3}_{\to 3}$$

(7)

$$e^{n^3}, \quad n^3 \to +\infty, \quad e^{n^3} \to +\infty$$

(8)

$$e^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{n} \to 0^+, \quad e^{\frac{1}{n}} \to 1$$

(9)

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n} \to 0^+, \quad \ln\left(\frac{1}{n}\right) \to -\infty$$

(10)

$$\ln\left(2^n\right), \quad 2^n \to +\infty, \quad \ln\left(2^n\right) \to +\infty$$

(11)

$$\ln\left(0{,}5^n\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2^n}\right)}_{-\infty}, \quad 2^n \to +\infty, \quad \frac{1}{2^n} \to 0^+$$

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0^+ \quad \text{si} \quad 0 < a < 1$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad a = 1$$

$$= +\infty \quad \text{si} \quad a > 1$$

(12)

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{e^{x^2}}}}_{0^+}$$

$x^2 \to +\infty$, $e^{x^2} \to +\infty$, $\frac{1}{e^{x^2}} \to 0^+$

(13)

$$e^{(-x)^2} = e^{x^2}$$

$x^2 \to +\infty$, $e^{x^2} \to +\infty$

(14)

$$\frac{x^2 \cancel{- x} \cancel{+ 2}}{e^{-x}} \quad \Big\} +\infty$$

$x^2 \to +\infty$, $-x \to -\infty$, $e^{-x} \to 0^+$

$$x^2 - x - 2 = x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

(15)

$$\frac{x^3 \cancel{- 3x} \cancel{- 1}}{e^{-\frac{1}{x}}} \quad \Big\} +\infty$$

$x^3 \to +\infty$, $-\frac{1}{x} \to 0^-$, $e^{-\frac{1}{x}} \to 1$

(16)

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \Big\} 0^-$$

$\frac{1}{x} \to 0^+$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \to -\infty$

$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$

$\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$

$\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$

$\log_{10}(10\,000) = \log_{10}(10^4) = 4$

Exercice 2 :

1 a) $\log_2(x) = 0$ $\qquad\qquad \log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

$\iff \dfrac{\ln x}{\ln 2} = 0$

$\iff \ln x = 0$

$\iff x = 1$

b) $\log_2(x) = 1$ $\qquad\qquad \log_a(a) = \log_a(a^1) = 1$

$\iff \dfrac{\ln x}{\ln 2} = 1$

$\iff \ln x = \ln 2$

$\iff x = 2$ car ln est strictement croissante $]0 ; +\infty[$

c) $\log_2(2^n) = \dfrac{\ln(2^n)}{\ln 2}$

$\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln 2}$

$= \dfrac{\ln\left(\left(e^{\ln 2}\right)^n\right)}{\ln 2}$

$e^{\ln x} = x$

$\log_a(a^n) = n$

$2 = e^{\ln 2}$

$= \dfrac{\ln\left(e^{n \ln 2}\right)}{\ln 2}$

$= \dfrac{n \cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}} = n$

d) $y = \log_2(x)$

$\iff y = \dfrac{\ln(x)}{\ln 2}$

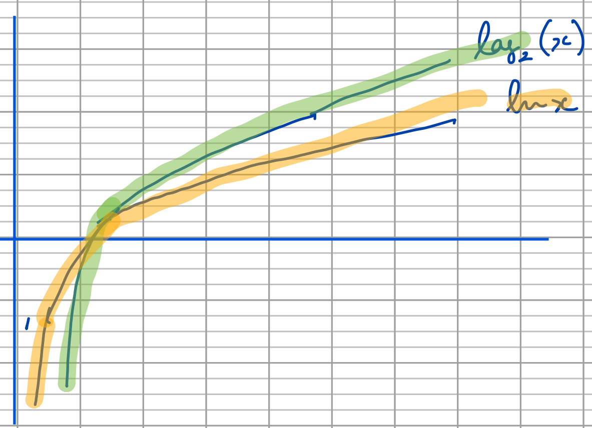
$\iff \ln x = y \ln 2$

$\iff x = e^{y \ln 2}$

e) $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln 2}$ $\ln(x) \rightarrow +\infty$, $\ln 2 > 0$ $\Big\}$ $+\infty$

f)

x	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	1	2	e
$\ln(x)$	-1	X	0	X	1
$\log_2(x)$	X	-1	0	1	X



Exercice 3 :

①

$$\frac{\underbrace{n^2}_{\to +\infty} \cancel{-3n} \cancel{+5}}{\underbrace{\underbrace{n^3}_{\to +\infty} \underbrace{\ln n}_{\to +\infty}}_{+\infty}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

1ère technique (polynôme) : factorisation par le terme de plus haut degré.

$$u_n = \frac{\cancel{n^3}\overbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{n^3}}_{\to 0}\right)}^{\to 0}}{\cancel{n^3}\left(\underbrace{\ln n}_{\to +\infty}\right)} \longrightarrow 0$$

$$u_n = \frac{\cancel{n^2}\overbrace{\left(\underbrace{1}_{\to 1} - \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}\right)}^{\to 1}}{\cancel{n^2}\left(\underbrace{n \ln n}_{\to +\infty}\right)} \longrightarrow 0^+$$

②

$$\frac{\overset{\to +\infty}{n^6}}{\underset{\to +\infty}{2^n}} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$\forall n > 0,$

$$u_n = \frac{n^6}{2^n}$$

$$= \frac{\left(e^{\ln n}\right)^6}{\left(e^{\ln 2}\right)^n}$$

$$= \frac{e^{\boxed{6 \ln n}}}{e^{\boxed{n \ln 2}}}$$

$$= e^{\overbrace{6 \ln n}^{+\infty} - \overbrace{n \ln 2}^{+\infty}} \qquad \infty - \infty$$

$$= e^{\underbrace{\underbrace{-n \ln 2}_{-\infty} \Big(\underbrace{\underbrace{\frac{\overset{\to 0^+}{6 \ln n}}{-n \ln 2}}_{0^-} + 1}_{\to 1} \Big)}_{\to 0^+}}$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\frac{3^{\boxed{7}}}{3^{\boxed{5}}} = 3^{7-5}$$

(3)

$$\underbrace{(-1)^n}_{\text{pas de limite}}\ \ln n \xrightarrow{} +\infty$$

$(-1)^n \ln n \to$ pas de limite

(u_n) converge $\iff$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ (limite finie)

(u_n) diverge : deux possibilités :

- pas de limite
- une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$)

Réponse : la suite (u_n) n'admet pas de limite.

(4)

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

(5) $\frac{6}{5} > 1$ donc $\left(\frac{6}{5}\right)^n \to +\infty$

(6)

$$\left.\frac{(\ln n)^3 \to +\infty}{n^2 \to +\infty}\right\} \text{ F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

(7) $\dfrac{n^2 \ln n \to +\infty}{2^n \to +\infty}$ F.I. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\forall n > 1, \quad u_n = \frac{n^2 \ln n}{2^n}$$

D'une part, $\forall n > 1$, $0 < \dfrac{n^2 \ln n}{2^n}$

D'autre part, $\forall n > 1$, $n > \ln n$

donc $\dfrac{n^2 \ln n}{2^n} < \dfrac{\overbrace{n^2 \cdot n}^{n^3}}{2^n}$

Donc $0 < \underbrace{\dfrac{n^2 \ln n}{2^n}}_{\downarrow \, 0^+} < \dfrac{n^3}{2^n} \to 0$ RCC

(th. d'encadrement).

(8) $\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{2^n}} - \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{n!}}$ F.I. $\infty - \infty$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$2^6 = 64$$

$$\boxed{\ln n < n^a < a^n < n!}$$

rappel de cours

$$\forall n \geq 1, \quad 2^n - n! = \underbrace{\underbrace{2^n}_{\to +\infty}\Big(\underbrace{1 - \underbrace{\frac{n!}{2^n}}_{\to +\infty}}_{\to -\infty}\Big)}_{-\infty}$$

RCC

(9)

$$\frac{n^2 - n\ln n + 1}{(n+1)^2} \qquad \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{n^2 - n\ln n + 1}{n^2 + 2n + 1}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}\Big(1 - \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0^+ \text{ CC}} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0^+}\Big)}{\cancel{n^2}\Big(1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0^+} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0^+}\Big)} \quad \begin{matrix} \to 1 \\ \to 1 \end{matrix} \Bigg\} \to 1$$

Exercice 4 :

① a) Analyse rapide $u_n = \dfrac{n^2 \cancel{- 3n} \cancel{+ 5}}{n^3 \ln n} \sim \dfrac{n^2}{n^3 \ln n}$

$$\sim \frac{\cancel{n^2} \cdot 1}{\cancel{n^2} \cdot n \ln n}$$

$$\sim \frac{1}{n \ln n} = v_n$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, v_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{n^2 - 3n + 5}{n^3 \ln n}}{\dfrac{1}{n \ln n}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$= \frac{(n^2 - 3n + 5) n \ln n}{n^3 \ln n \cdot 1}$$

$\ln n < n^a < a^n < n!$

$$= \frac{n^2 - 3n + 5}{n^2}$$

F.I. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{\cancel{n^2} \cdot 1}$$

$1 \to 1$, $\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{5}{n^2} \to 0$

$\} \to 1$

$\} \to 1$

$\} \to 1$

conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

b) $u_n = 2^n - n! \sim -n!$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -n!$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{2^n - n!}{-n!} \qquad \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad F.I.$$

$$= \frac{-\cancel{n!}\left(-\frac{2^n}{n!} + 1\right)}{-\cancel{n!}}$$

$$= -\underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\substack{\text{RCC} \\ \to 0}} + 1 \quad \Big\} \to 1$$

$$= -\underbrace{\frac{e^{n \ln 2}}{n!}}_{\substack{\text{RCC} \\ \to 0}} + 1 \quad \Big\} \to 1$$

c) $$\frac{\cancel{3^n} + 5^n}{\cancel{\ln n} + 6^n} \sim \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

On pose
$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{3^n + 5^n}{\ln n + 6^n}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$$\ln n \quad 1 \; 6$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{3^n + 5^n}{\ln n + 6^n}}{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$$

$$= \frac{(3^n + 5^n)\,6^n}{(\ln n + 6^n)\,5^n}$$

suite géo $-1 < q < 1$

$$= \frac{\cancel{5^n}\left(\overbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}^{\to 0} + 1\right)\cancel{6^n}}{\cancel{6^n}\left(\underbrace{\frac{\ln n}{6^n}}_{\text{RCC} \to 0} + 1\right)\cancel{5^n}} \to 1$$

d)

$$\sqrt{\frac{n^{627} + \cancel{1}}{n^{626} + \cancel{7}}} \sim \sqrt{n}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sqrt{n}$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{\dfrac{n^{627} + 1}{n^{626} + 7}}}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$= \sqrt{\frac{n^{627} + 1}{(n^{626} + 7)\,n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^{627}+1}{n^{627}+7n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{n^{627}}\left(1+\frac{1}{n^{627}}\right)}{\cancel{n^{627}}\left(1+\frac{7}{n^{626}}\right)}} \rightarrow 1$$

(2) • $\boxed{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x}$ (on admet ce résultat)

$$u_n = n\,\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \boxed{\frac{1}{n}} = 0$$

donc $u_n \sim n \boxed{\frac{1}{n}} \sim 1$

• $$v_n = \frac{\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\boxed{\frac{1}{n}}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

• $$w_n = \left(\frac{3n+1}{5n+5}\right)^n \qquad a^n = e^{n \ln a}$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{3n+1}{5n+5}\right)}$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{3\cancel{n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{5\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{3}{5}\cdot\left(1+\frac{1}{3n}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{n\left[\ln\left(\frac{3}{5}\right) + \boxed{\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)} - \boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]}$$

$x \to 0$ $\quad x \to 0$

$$\sim e^{n\left(\ln\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n}\right)}$$

$\to 0$ $\quad \to 0$

$$\sim e^{n\ln\frac{3}{5}}\; e^{\frac{n}{3n}} \cdot e^{-\frac{n}{n}}$$

$$\sim \left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-1}$$

$$\sim \left(\frac{3}{5}\right)^n e^{\frac{1}{3}-1}$$

$$\sim e^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

③ $$u_n = \frac{2 + \cancel{n^2 + \ln n} + e^n}{3\cancel{n^{97} + \sqrt{n}} + e^{2n}} \sim e^{-n} \sim \frac{1}{e^n}$$

Exercice 5 : Prépondérance, équivalence, domination

① Démontrer les affirmations suivantes :

(a) $n^2(\ln n)^3 = o(n^3)$

$$(\ln n)^a \ll n^b \ll c^n \ll (n!)^d$$

$n^2(\ln n)^3 \ll n^3$

$n^2(\ln n)^3$ est égal à petit o de n^3

$n^2(\ln n)^3$ est NEGLIGEABLE devant n^3

n^3 est PRÉPONDÉRANT devant $n^2(\ln n)^3$

ce qu'il faut montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2(\ln n)^3}{n^3} = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2(\ln n)^3}{n^3} = \frac{\cancel{n^2}(\ln n)^3}{\cancel{n^2} \cdot n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad (\text{RCC})$$

__Conclusion :__

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2(\ln n)^3}{n^3} = 0 \quad \text{donc} \quad n^2(\ln n)^3 = o(n^3)$$

b) $2^n \ln n + n^6 = O(e^n)$

$2^n \ln n + n^6 \underset{+\infty}{\preceq} e^n$

$2^n \ln n + n^6$ est égal à grand O de e^n

$2^n \ln n + n^6$ est DOMINÉ par e^n

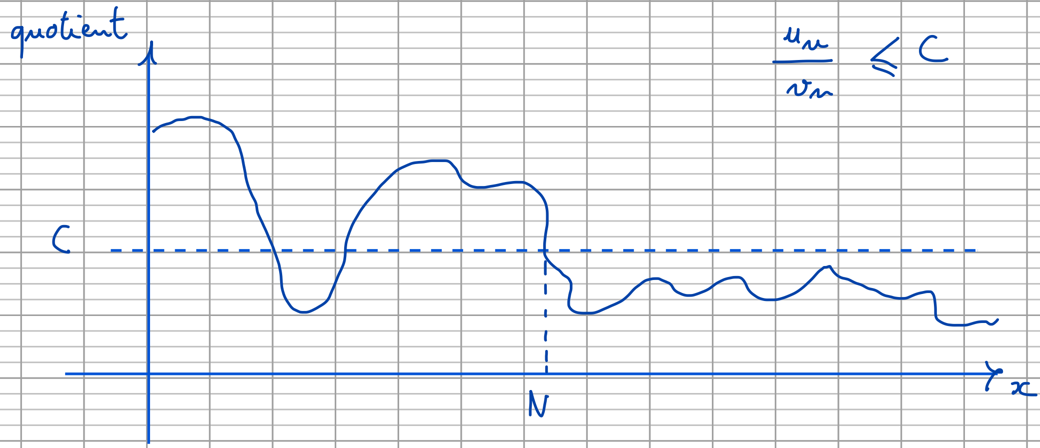
e^n DOMINE $2^n \ln n + n^6$

(tout est positif)

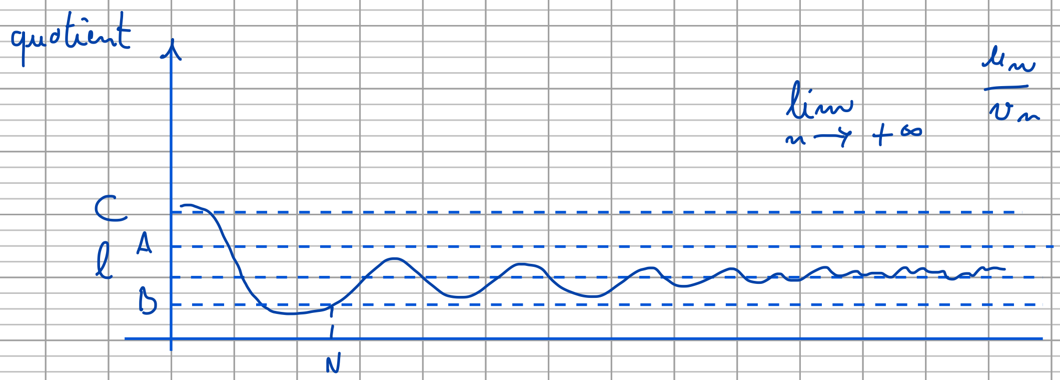
ce qu'il faut montrer :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, C \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n > N, \quad \cancel{\left|} \frac{2^n \ln n + n^6}{e^n} \cancel{\right|} \leqslant C$$

$\frac{u_n}{v_n} \leq C$



$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$



Essayons d'étudier la limite du quotient.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2^n \ln n + n^6}{e^n} = \frac{2^n \ln n}{e^n} + \frac{n^6}{e^n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \ (\text{RCC})$

$\frac{2^n \ln n}{e^n} = \frac{n \times \ln n}{n \times \left(\frac{e}{2}\right)^n} = \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{n}{\left(\frac{e}{2}\right)^n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \ (\text{RCC})$

$\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \ (\text{RCC})$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n \ln n + n^6}{e^n} = 0$ donc $2^n \ln n + n^6 = o(e^n)$

donc par héritage $2^n \ln n + n^6 = O(e^n)$

O est moins restrictif que o

c) Si $0<a<b$ alors $a^n = o(b^n)$

$a^n \ll b^n$

a^n est égal à petit o de b^n

a^n est NÉGLIGEABLE devant b^n

b^n est PRÉPONDÉRANT devant a^n

Il faut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{b^n} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ car $0<\frac{a}{b}<1$ car $a<b$

(suite géométrique de raison $0<q<1$)

Donc $a^n = o(b^n)$ si $0<a<b$

(2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses, justifier.

a) En $+\infty$, $n^3 \ln n \ll n^4$

$n^3 \ln n = o(n^4)$

$n^3 \ln n$ est NÉGLIGEABLE devant n^4

n^4 est PRÉPONDÉRANT devant $n^3 \ln n$

Il faut montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3 \ln n}{n^4} = 0$

(voir (1) a) VRAI

b) En $+\infty$, $3^n = o(e^n)$ FAUX (voir (1) c)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3^n}{e^n} = \left(\frac{3}{e}\right)^n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ car $e<3$ donc $\frac{3}{e}>1$

(suite géométrique de raison $q>1$)

on aurait dû trouver zéro

c) En $+\infty$, $n^3(\ln n)^2 + n^3 - n = O\left(n^3(\ln n)^2\right)$

$n^3(\ln n)^2 + n^3 - n$ est égal à grand O de $n^3(\ln n)^2$

$n^3(\ln n)^2 + n^3 - n$ est DOMINÉ par $n^3(\ln n)^2$

$n^3(\ln n)^2$ DOMINE $n^3(\ln n)^2 + n^3 - n$

Il faut montrer que

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ C \in \mathbb{R} \mid \forall n > N,\ \left|\frac{n^3(\ln n)^2 + n^3 - n}{n^3(\ln n)^2}\right| \leqslant C$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^3(\ln n)^2 + n^3 - n}{n^3(\ln n)^2} = \frac{n^3(\ln n)^2}{n^3(\ln n)^2} + \frac{\cancel{n^3}\cdot 1}{\cancel{n^3}(\ln n)^2} - \frac{n}{n^3(\ln n)^2}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{(\ln n)^2} - \frac{1}{n^2(\ln n)^2}}_{\xrightarrow{+\infty}\ 1}$$

(par opération sur les limites)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(\ln n)^2 + n^3 - n}{n^3(\ln n)^2} = 1$

Donc $n^3(\ln n)^2 + n^3 - n \underset{+\infty}{\sim} n^3(\ln n)^2$

$n^3(\ln n)^2 + n^3 - n$ est équivalent à $n^3(\ln n)^2$

Donc par héritage (équivalence est plus restrictive que la domination :

$$n^3(\ln n)^2 + n^3 - n = O\left(n^3(\ln n)^2\right) \quad \text{VRAI}$$

(et $n^3(\ln n)^2 = O\left(n^3(\ln n)^2 + n^3 - n\right)$)

Domination mutuelle car équivalence.

d) Un algorithme dont la complexité est $c(n) = n^3 + (\ln n)^3$ est à complexité polynomiale.

$$n^3 + (\ln n)^3 = \Theta(n^3)$$

$$\exists A, B \in \mathbb{R}_+, N \in \mathbb{N}^* \mid \forall n > N, A \leq \left| \frac{n^3 + (\ln n)^3}{n^3} \right| \leq B$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^3 + (\ln n)^3}{n^3} = 1 + \frac{(\ln n)^3}{n^3} \to 0 \ (\text{RCC})$$

Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + (\ln n)^3}{n^3} = 1$

Donc $n^3 + (\ln n)^3 \sim n^3$

Donc par héritage (équivalence plus restrictive que le grand Θ) $n^3 + (\ln n)^3 = \Theta(n^3)$ VRAI

Donc $c(n) = n^3 + (\ln n)^3$ est de complexité polynomiale.

Exercice 6. Prépondérance, équivalence, domination II

$2n^2 = o(n^2)$ F $\qquad Q = \frac{2n^2}{n^2} = 2 \not\xrightarrow[+\infty]{} 0$

$2n^2 = O(n^2)$ V $\qquad Q = 2 \leqslant 3$ ← majorant

$2n^2 = \Theta(n^2)$ V $\qquad 1 \leqslant Q = 2 \leqslant 3$ ← majorant

↖ minorant

$2n^2 \sim n^2$ F $\qquad Q = 2 \not\xrightarrow[+\infty]{} 1$

$2n^2 - 3n + 1 = o(n^2)$ F $\qquad Q = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \xrightarrow[+\infty]{} 2 \neq 0$

$2n^2 - 3n + 1 = O(n^2)$ V $\qquad Q \xrightarrow[+\infty]{} 2$ donc à partir d'un certain rang

$Q \leqslant 3$ ← majorant

$2n^2 - 3n + 1 = \Theta(n^2)$ V $\qquad Q \xrightarrow[+\infty]{} 2$ donc à partir d'un certain rang

min ↗ $1 \leqslant Q \leqslant 3$ ↖ maj

$2n^2 - 3n + 1 \sim n^2$ F $\qquad Q \xrightarrow[+\infty]{} 2 \neq 1$

Exercice 7. Calcul de complexité

(1) SOMME(n) calcule

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

C'est la somme des entiers de 1 à n

LISTE(n) crée un tableau de n + 1 cases contenant les valeurs SOMME(0), SOMME(1), ... , SOMME(n) dans cet ordre.

(L1: L = [0] * (n + 1))

(2) Pour SOMME(n), n additions sont réalisées (n tours de boucles, une addition par tour).

$$C_S(n) = n = \Theta(n)$$

complexité linéaire

Pour LISTE(n), on calcule successivement :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{SOMME}(1) : & 1 \text{ addition} \\ \text{SOMME}(2) : & 2 \text{ additions} \\ \text{SOMME}(3) : & 3 \text{ additions} \\ \vdots & \\ \text{SOMME}(n) : & n \text{ additions} \end{array}\right\} 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$
\begin{array}{rl}
S = & 1 + 2 + 3 + \cdots + n-2 + n-1 + n \\
S = & n + n-1 + n-2 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
\hline
2S = & \underbrace{n+1 + n+1 + n+1 + \cdots + n+1 + n+1 + n+1}_{n(n+1)}
\end{array}
$$

$$2S = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_L(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

complexité quadratique
(cas particulier de complexité polynomiale)

3

LISTE_v2

```
L[0] = 0
POUR k = 1 , ... , n
        L[k] = L[k-1] + k
FIN POUR
RENVOYER : L
```

Même situation que pour SOMME(n)

$$C_L^{(v2)}(n) = n = \Theta(n)$$

(4)

SOMME_v2(n)

RETURN : n * (n + 1) // 2

$C_s^{(v2)}(n) = 3 = \Theta(1)$

Complexité constante

(5) Il y a n tours de boucle et pour chaque tour les 3 étapes de SOMME_v2(k).

Donc $C_L^{(v2)}(n) = 3n = \Theta(n)$

Complexité linéaire

Exercice 8 : Calcul de complexité

Étapes à prendre en compte
- opérations ✓
- affectations ✓
- tests négligés ✗

choisis arbitrairement : soyez attentifs au DS pour bien compter !

```
ALGO1(n)

m = n                    } 2
S = 1
TANT QUE m > 0
      S = 2*S            } 4 } x n
      m = m-1
FIN TANT QUE
RENVOYER S
```

Nombre d'étapes : $C_1(n) = 4n + 2 = \Theta(n)$

ALGO1 a une complexité LINÉAIRE.

```
ALGO2(p,q)

S = 0                          } 1
POUR i = 1, ..., min(p,q) :    } 2 } 2x min(p,q)
      S = S + max(p,q)         } 2 } 4x min(p,q)
FIN POUR
RENVOYER S
```

$C_2(p,q) = 2\min(p,q) + 1 = \Theta(\min(p,q))$

$C_2'(p,q) = 4\min(p,q) + 1 = \Theta(\min(p,q))$

Exercice 9. Calcul de complexité

(1)
$$n = 2^k$$
$$\Leftrightarrow \log_2(n) = \log_2(2^k)$$
$$\Leftrightarrow \log_2(n) = k$$

(2) 4 coefficients × 3 opérations = 12 étapes

(3) $(n-1)$ multiplications × 12 étapes

$$C_1(n) = 12n - 12 \sim 12n = \Theta(n)$$

complexité LINÉAIRE

(4)
$$\left.\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ A^4 &= A^2 \times A^2 \\ A^8 &= A^4 \times A^4 \\ A^{16} &= A^8 \times A^8 \end{aligned}\right\} \text{4 multiplications} = \log_2(\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{16})$$

$$C_2(n) = 12\log_2(n) = \Theta(\ln n)$$

Complexité LOGARITHMIQUE

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$$

2N-1 opérations

N multiplication
N-1 additions

$$N=3 \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{a_1 b_1 + a_4 \cdot b_2 + a_3 b_7}_{\text{N multiplication, N-1 additions}}}^{2N-1 \text{ opérations}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{N^2 \text{ coefficient.}}$$

étapes pour une multiplication

$= N^2$ coefficients $\times (2N-1)$ opération

$= 2N^3 - N^2$ opérations.

<u>Avec l'exponentiation naïve :</u>

$C_1(n, N) =$ nbre de multiplications $\times$ nbre opérations

$= (n-1)(2N^3 - N^2)$

$\sim 2nN^3$

$= \Theta(nN^3)$

Complexité POLYNÔMIALE

<u>Avec l'exponentiation rapide :</u>

$C_2(n, N) =$ nbre de multiplications $\times$ nbre opérations

$= \log_2(n)\,(2N^3 - N^2)$

$$= \underbrace{2N^3 \log_2(n)}_{\text{prépondérant}} - \underbrace{N^2 \log_2(n)}_{\text{négligeable}}$$

$\sim 2N^3 \log_2(n)$

$= \Theta(N^3 \ln n)$