NOM : .... Prénom : .... Groupe : ......

IUT de Paris Rives de Seine – Département Informatique – B.U.T. 1
Outils mathématiques fondamentaux (R1.07) – Initiation à l'algèbre linéaire
Interrogation du mercredi 1er octobre 2025 à 15h30 – 30 min (CORRECTION)

Sans calculatrice, sans téléphone ou objet connecté, sans document.

Exercice 1 *(...... sur 3 points)*
Dans la résolution du système suivant par la méthode du pivot de Gauss, quelles doivent être les trois prochaines opérations élémentaires ?
Attention : on ne demande **aucun calcul**, simplement les opérations du type $L_i \leftarrow$ ... ou $L_i \leftrightarrow$ ....

L_1	1	0	0	0	1	4
L_2	0	1	0	-1	0	-5
L_3	0	0	0	2	1	0
L_4	0	0	2	3	4	-3
L_5	0	0	5	6	0	1

Correction.

$$L_4 \leftrightarrow L_3$$
$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$
$$L_5 \leftarrow L_5 - 5L_3$$

Exercice 2 *(...... sur 2 points)*
Soit un système d'équations linéaires dont les inconnues sont x, y et z. Le déroulement de l'algorithme du pivot de Gauss sur ce système aboutit à :

L_1	1	3	0	6
L_2	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0

Décrire l'ensemble E des solutions du système.

Correction. Le tableau ci-dessus représente le système ci-dessous à gauche :

$$\begin{cases} x+3y=6 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=6-3k \\ y=k \\ z=k' \end{cases} \quad , \quad k,k'\in\mathbb{R} \qquad \text{Donc : } \quad E=\left\{ \begin{pmatrix} 6-3k \\ k \\ k' \end{pmatrix}, \quad k,k'\in\mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3 *(...... sur 8 points)*
Résoudre le système linéaire suivant et donner explicitement l'ensemble des solutions. Penser à détailler les étapes, à faire apparaître les pivots et les opérations élémentaires puis, éventuellement, à effectuer une vérification.

$$(S_1)\begin{cases} x+3y-2z=5 \\ x+2y+5z=9 \\ -3x+4y-9z=9 \end{cases}$$

Correction.

L_1	$\boxed{1}$	3	-2	5
L_2	1	2	5	9
L_3	-3	4	-9	9
$L_1 \leftarrow L_1$	1	3	-2	5
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	0	$\boxed{-1}$	7	4
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$	0	13	-15	24
$L_1 \leftarrow L_1$	1	3	-2	5
$L_2 \leftarrow -L_2$	0	$\boxed{1}$	-7	-4
$L_3 \leftarrow L_3$	0	13	-15	24
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$	1	0	19	17
$L_2 \leftarrow L_2$	0	1	-7	-4
$L_3 \leftarrow L_3 - 13L_2$	0	0	$\boxed{76}$	76
$L_1 \leftarrow L_1$	1	0	19	17
$L_2 \leftarrow L_2$	0	1	-7	-4
$L_3 \leftarrow \frac{1}{76}L_3$	0	0	$\boxed{1}$	1
$L_1 \leftarrow L_1 - 19L_3$	1	0	0	-2
$L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3$	0	1	0	3
$L_3 \leftarrow L_3$	0	0	1	1

$$(S_1) \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{Donc :} \quad \mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= -2+3\cdot 3-2\cdot 1 \\ &= -2+9-2 \\ &= 5 \quad \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y+5z &= -2+2\cdot 3+5\cdot 1 \\ &= -2+6+5 \\ &= 9 \quad \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x+4y+-9z &= -3(-2)+4\cdot 3-9\cdot 1 \\ &= 6+12-9 \\ &= 9 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Exercice 4 *(...... sur 7 points)*
Résoudre les deux systèmes linéaires suivants et donner explicitement l'ensemble des solutions de chacun d'eux. Vous pouvez commencer par résoudre (S_2) puis reprendre les calculs pour résoudre (S_3), ou alors résoudre simultanément les deux systèmes.

$$(S_2)\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+4y-5z=-1 \\ 3x+8y+z=-13 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+4y-5z=3 \\ 3x+8y+z=13 \end{cases}$$

Correction.

L_1	$\boxed{1}$	2	3	5
L_2	1	4	-5	-1
L_3	3	8	1	-13
$L_1 \leftarrow L_1$	1	2	3	5
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	0	$\boxed{2}$	-8	-6
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	0	2	-8	-28
$L_1 \leftarrow L_1$	1	2	3	5
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$	0	$\boxed{1}$	-4	-3
$L_3 \leftarrow L_3$	0	2	-8	-28
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	1	0	11	11
$L_2 \leftarrow L_2$	0	1	-4	-3
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	0	0	0	-22

L_1	$\boxed{1}$	2	3	5
L_2	1	4	-5	3
L_3	3	8	1	13
$L_1 \leftarrow L_1$	1	2	3	5
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	0	$\boxed{2}$	-8	-2
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	0	2	-8	-2
$L_1 \leftarrow L_1$	1	2	3	5
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$	0	$\boxed{1}$	-4	-1
$L_3 \leftarrow L_3$	0	2	-8	-2
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	1	0	11	7
$L_2 \leftarrow L_2$	0	1	-4	-1
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	0	0	0	0

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+11z=1 \\ y-4z=1 \\ 0=-22 \quad \text{(Absurde)} \end{cases} \qquad (S_3) \iff \begin{cases} x+11z=7 \\ y-4z=-1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc : $\mathscr{S}_2 = \varnothing$

Donc : $\mathscr{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 7-11k \\ 4k-1 \\ k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$